Apuntes sobre las series y la transformada de Fourier

Cayetano Guerra Artal - Dept. Informática y Sistemas
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

April 24, 2006

1 Periodicidad

Se dice que una función f es periódica si existe un T tal que $f(x) = f(x+T)$ para todo x. Al mínimo T que satisfaga esta condición se le denomina *periodo*.

Además, si la función es integrable, debe de cumplirse que:

$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx$$

2 Producto interior de dos funciones

Sean dos funciones f y g integrables en el intervalo real $[a,b]$, definimos el *producto interior* de esas dos funciones como la integral:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

y lo representamos como $\langle f, g \rangle$. Asimismo, definiremos como *norma* de la función f a la raíz cuadrada del producto interior de f consigo misma, y lo representaremos como $\| f \|$. De esta forma:

$$\| f \| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

3 Sistemas ortogonales de funciones

Consideremos el conjunto de funciones $S = (\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots)$ integrables todas en el intervalo real $[a,b]$. Decimos que el conjunto S es un conjunto *ortogonal* de funciones en $[a,b]$ si dadas dos ϕ_i y ϕ_j, tales que $i \neq j$, entonces:

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0$$

y en el caso en que $i = j$ entonces se cumple que:

$$\langle\phi_i, \phi_j\rangle \neq 0$$

Si además se cumple que, para cualquier ϕ_i perteneciente a S

$$\langle\phi_i, \phi_i\rangle = 1$$

entonces diremos que el conjunto de funciones S es *ortonormal*. Podemos demostrar fácilmente que todo sistema ortogonal puede convertirse en un sistema ortonormal dividiendo cada ϕ_i por su norma.

4 La idea

En un espacio vectorial V podemos definir cualquier vector $\vec{v}$ como una combinación lineal de los vectores de la base, es decir:

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n$$

La idea que se plantea en las series de Fourier es similar. Una función f puede ser expresada como una combianción lineal de unas funciones base que, a su vez, constituyen un conjunto de funciones ortonormales. De esta forma:

$$f(x) = a_0\phi_0 + a_1\phi_1 + \cdots + a_n\phi_n$$

5 Cómo calcular los coeficientes

Para calcular los coeficientes que multiplican a cada una de las funciones de la base procedemos de la siguiente forma. Supongamos que queremos calcular a_i. Partimos de:

$$f(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \cdots + a_i\phi_i(x) + \cdots + a_n\phi_n(x)$$

multiplicamos cada lado de la igualdad por ϕ_i, de esta forma tenemos:

$$\phi_i(x)f(x) = \phi_i(x)[a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \cdots + a_i\phi_i(x) + \cdots + a_n\phi_n(x)]$$

Aplicamos la propiedad distributiva sobre el lado derecho de la igualdad:

$$\phi_i(x)f(x) = a_0\phi_i(x)\phi_0(x) + a_1\phi_i(x)\phi_1(x) + \cdots + a_i\phi_i(x)\phi_i(x) + \cdots + a_n\phi_i(x)\phi_n(x)$$

Y si ahora integramos cada lado de la igualdad en el intervalo [a,b]:

$$\int_a^b \phi_i(x)f(x)dx = \int_a^b [a_0\phi_i(x)\phi_0(x) + a_1\phi_i(x)\phi_1(x) + \cdots + a_i\phi_i(x)\phi_i(x) + \cdots + a_n\phi_i(x)\phi_n(x)]dx$$

Como la integral de una suma es la suma de la integral de cada uno de los sumandos, entonces:

$$\int_a^b \phi_i(x)f(x)dx = a_0 \int_a^b \phi_i(x)\phi_0(x)dx + a_1 \int_a^b \phi_i(x)\phi_1(x)dx + \cdots + a_i \int_a^b \phi_i(x)\phi_i(x)dx + \cdots + a_n \int_a^b \phi_i(x)\phi_n($$

Escrito de otra forma:

$$\int_a^b \phi_i(x)f(x)dx = a_0\langle\phi_i(x),\phi_0(x)\rangle + a_1\langle\phi_i(x),\phi_1(x)\rangle + \cdots + a_i\langle\phi_i(x),\phi_i(x)\rangle + \cdots + a_n\langle\phi_i(x),\phi_n(x)\rangle$$

Debido a que el conjunto de funciones S forman un sistema ortonormal de funciones, todos los productos interiores serán 0 excepto el producto interior $\langle\phi_i(x),\phi_i(x)\rangle$ que será 1. Por lo tanto, nos quedaría:

$$\int_a^b \phi_i(x)f(x)dx = a_i$$

Y procediendo de la misma manera podemos calcular todos los coeficientes restantes:

$$a_0 = \int_a^b \phi_0(x)f(x)dx$$

$$a_1 = \int_a^b \phi_1(x)f(x)dx$$

$$a_2 = \int_a^b \phi_2(x)f(x)dx$$

$$\cdots$$

$$a_n = \int_a^b \phi_n(x)f(x)dx$$

6 Un sistema ortogonal de funciones concreto

Es posible demostrar que el siguiente conjunto de funciones es un sistema ortogonal de funciones en el intervalo $[0, 2\pi]$:

$$\phi_0(x) = \frac{1}{2}$$

$$\phi_1(x) = cos(x)$$

$$\phi_2(x) = sen(x)$$

$$\phi_3(x) = cos(2x)$$
$$\phi_4(x) = sen(2x)$$
$$\phi_5(x) = cos(3x)$$
$$\phi_6(x) = sen(3x)$$

$$\ldots$$

Escrito de forma general tendríamos:

$$\phi_0(x) = \frac{1}{2}$$
$$\phi_{2n-1}(x) = cos(nx)$$
$$\phi_{2n}(x) = sen(nx)$$

para n=1,2,3,...

7 Serie trigonométrica de Fourier

Sea $f(x)$ una función periódica de periodo 2π, tenemos que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(nx) + b_n sen(nx))$$

y los diferentes coeficientes a_i y b_i los podemos calcular de igual forma que hemos hecho antes. Tenemos entonces que:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)cos(nx)dx$$

donde n=0,1,2,...

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sen(nx)dx$$

donde n=1,2,...

Tal y como hemos planteado la serie, esta nos serviría sólo para funciones periódicas $f(x)$ de periodo 2π. Sin embargo, hay más funciones periódicas con periodo T distinto de 2π. Afortunadamente, podemos adaptar lo visto hasta ahora, ya que es sólo un problema de escalado horizontal.

Sea ahora $f(x)$ una función periódica de periodo arbitrario T. Para escalar la serie de senos y cosenos tendremos entonces que multiplicar x por un factor ω que valdrá:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Y los coeficientes, teniendo en cuenta el escalado, serán:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)cos(n\omega x)dx$$

donde n=0,1,2,...

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)sen(n\omega x)dx$$

donde n=1,2,...
Ahora la serie tomará la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(n\omega x) + b_n sen(n\omega x))$$

8 Añadiendo "complejidad" ;-)

Vemos ahora la notación compleja de las series de Fourier. Por la identidad de Euler tenemos:

$$e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$$

Y de esta identidad podemos extraer las siguientes igualdades:

$$cos(nx) = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx})$$

y

$$sen(nx) = \frac{i}{2}(e^{-inx} - e^{inx})$$

Por tanto, sustituyendo en la serie original:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(nx) + b_n sen(nx)i)$$

tenemos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{-inx} - e^{inx}}{2})$$

Agrupando un poco:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx})$$

Y si ahora llamamos c_n a:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

y c_{-n} a:

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

Debemos fijarnos en que c_{-n} es el conjugado complejo de c_n. Seguimos sustituyendo:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})$$

Y por último, la serie anterior puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Los coeficientes se calcularían:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

9 Transformada de Fourier

Las series de Fourier pueden reconstruir funciones periódicas integrables en ese periodo. Sin embargo, no todas las funciones son periódicas. La pregunta que surge es si es posible ampliar las series de Fourier para abarcar a las funciones no periódicas. La respuesta es sí, a través de la Transformada de Fourier.

Empezamos a desarrollar la transformada de Fourier partiendo de la representación exponencial de las series de Fourier sobre funciones periódicas de periodo arbitrario T.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$$

donde los coeficientes c_n vendrán dados por la expresión:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}dx$$

El coeficiente de escalado será, de nuevo, ω.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Donde, si agregamos el índice n, tendremos:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T}n$$

Y llamaremos $\Delta\omega$ a:

$$\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{2\pi}{T}$$

Sustituyendo ahora, en el sumatorio de la serie de Fourier, los valores de los coeficientes, tendremos:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-i\omega_n x}dx)e^{i\omega_n x}$$

Multiplicando la ecuación por $2\pi/2\pi$ podemos dejarla como:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{i\omega_n x}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-i\omega_n x}dx)\Delta\omega$$

El periodo T de la función $f(x)$ podremos hacerlo ahora tender a infinito para, de esta manera, conseguir una función no periódica. Por lo tanto, $\Delta\omega$ tenderá a 0. De esta forma, el sumatorio se convertirá en integral:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\omega x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)dx)d\omega$$

Ahora, al aumentar la longitud del periodo se reduce el espacio entre las diferentes frecuencias de las funciones base hasta convertirse en un continuo. Los distintos coeficientes c_n se han transformado en una función $F(\omega)$.

Llamamos, por tanto, *Transformada de Fourier* a la parte interior de la ecuación anterior:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

y *Transformada de Fourier Inversa* a la parte exterior:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

10 Transformada de Fourier Discreta

En nuestro mundo digital nos es difícil manejar expresiones analíticamente, así que para calcular la transformada de Fourier y su inversa hacemos uso de una versión discreta o "digital" de la misma. Observa que, al ser discreta, la función será finita o periódica. Por tanto, podremos usar una versión discreta de la expresión anterior:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}dx$$

Como la función $f(x)$ sobre la que queremos calcular su transformada discreta de Fourier la tenemos digitalizada, podremos verla como un vector de longitud N. Adoptaremos la nomenclatura:

$$\mathbf{f} = [f_0, f_1, \ldots, f_{(n-1)}]$$

Por lo tanto, la versión discreta será:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jk}$$

Observa que al corresponder el vector **f** a una versión discreta de la función continua $f(x)$, el periodo T pasa a cobrar sentido como el número de elementos del vector **f**. Además, el número de elementos del vector resultado X, es también N. Fíjate que a partir de X_n los resultados se repiten.